EXEMPLA TRAHUNT ...

ŠTEFAN ZNÁM, Bratislava

V poslednom čase sa mnoho hovorí o aktivizácii stredoškolských profesorov v súvislosti s modernizáciou vyučovania matematiky. Myslím si, že úlohou strednej školy je modernizovať nielen obsah, ale prístup k matematike vôbec. Profesor musí študenta intenzívnejšie viesť k samostatnému matematickému mysleniu a tvorivému prístupu k jednotlivým problémom. (V tomto smere zostáva stredná škola viac dlžná žiakom ako po obsahovej stránke. Tento fakt si každoročne overujem na prvom ročníku PF UK). Takýto prístup môže u žiaka vypestovať len profesor majúci vlastné skúsenosti v tvorivej matematickej činnosti. A tak sa dostáva na scénu problém odbornej vedeckej a vedecko-popularizačnej činnosti stredoškolských profesorov.

V minulosti nebolo raritou, aby stredoškolský učiteľ bol súčasne vedeckým pracovníkom. Dnes sa s tým stretávame veľmi zriedka. Myslím preto, že nebude bez úžitku napísať o vedeckej práci RNDr. Pavla Bartoša, ktorý nedávno oslávil svoju sedemdesiatku (pozri článok: *Pán učiteľ*, PMFA, číslo 3, 1971). Jeho činnosť je dôkazom toho, že stredoškolský profesor môže (aj pri dnešnej úrovni vedy) byť súčasne aj vedeckým pracovníkom. Jeho príklad nie je celkom typický, pretože väčšinu svojich vedeckých článkov napísal už ako penzista; avšak príprava na túto prácu — štúdium vedeckej literatúry a písanie metodických článkov — sa odohrávala ešte za jeho aktívneho učiteľského pôsobenia.

Pavel Bartoš pri spomínaní na začiatky a impulzy k svojej vedeckej práci hovorí: „*Na celoštátnej konferencii o elementárnej matematike, ktorú usporiadala Jednota československých matematikov a fyzikov v Brne roku 1959, nabádal akademik V. Kořínek stredoškolských matematikov k vedeckej činnosti. Ako vhodné partie pre nich odporúčal kombinatoriku, elementárnu teóriu čísel a viacrozmernú elementárnu geometriu. Pravdepodobne nie je náhoda, že moje práce sú zamerané práve týmto smerom.*“

Vedecké práce P. Bartoša možno rozdeliť do troch kategórií.

A. Najbohatšia je jeho činnosť v elementárnej geometrii. Práce sú prevažne venované geometrii simplexov v n-rozmernom euklidovskom priestore E_n ([4] až [10]).

Simplex v E_n je prienik $n + 1$ polpriestorov. Rovnice oporných rovín pritom možno normovať tak, aby spomínané polpriestory boli určené nerovnicami

$$\pi_k = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + b_k \geqq 0,\ k = 1, \ldots, n + 1$$

Pomocou nezáporných parametrov q_k možno tieto nerovnice zapísať v tvare rovníc

$$\pi_k = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + b_k = q_k,\ k = 1, \ldots, n + 1, q_k \geqq 0 \tag{1}$$

pričom ľubovoľná n-tica týchto rovníc tvorí lineárne nezávislú sústavu. Ak z nich vylúčime $x_1, \ldots, x_n$, dostaneme rovnosť

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & q_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} & q_n \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \ldots a_{n+1\,n} & q_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} & b_n \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \ldots a_{n+1\,n} & b_{n+1} \end{vmatrix} = \Delta$$

Po rozvinutí determinantu na ľavej strane podľa prvkov posledného stĺpca

$$\sum_{i=1}^{n+1} B_i q_i = \Delta \tag{2}$$

kde B_i je algebraický doplnok k prvku q_i. Z rovnice (2) vyplýva (pozri [4]): prienik polpriestorov (1) je simplexom vtedy a len vtedy, keď pre ľubovoľné $i = 1, \ldots, n + 1$ platí

$$\operatorname{sign} B_i = \operatorname{sign} \Delta \neq 0.$$

Predošlé poznatky sa v práci [5] zovšeobecňujú na konvexné m-steny v E_n, pričom $m \geqq n + 1$. V tomto prípade máme $m - n$ rovníc (tzv. charakteristických rovníc m-stena)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & q_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} & q_n \\ a_{n+k\,1} & a_{n+k\,2} & \ldots a_{n+k\,n} & q_{n+k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} & b_n \\ a_{n+k\,1} & a_{n+k\,2} & \ldots a_{n+k\,n} & b_{n+k} \end{vmatrix}$$

pre $k = 1, 2, \ldots, m - n$. Z tejto sústavy vyplývajú nutné a postačujúce podmienky, aby prienik m polpriestorov v E_n tvoril konvexný m-sten (tieto podmienky sú dosť zložité, preto ich tu neuvádzame). Pri tomto probléme sa objavil aj jeden výsledok patriaci do teórie determinantov:

je určená nutná a postačujúca podmienka (tiež dosť zložitá) na to, aby sa daný determinant D dal „transformovať“ tak, aby prvky určitého riadku (alebo stĺpca) boli kladné, kým ostatné prvky a hodnota determinantu sa nezmenia.

V práci [6] sa pomocou oporných nadrovín simplexu v E_n (ktorých rovnice normalizujeme a volíme tak, aby $q_k \geqq 0$) je určený polomer ϱ hypersféry vpísanej do simplexu

$$\varrho = \frac{\Delta}{\sum\limits_{i+1}^{n+1} B_i}$$

(Δ a B_i majú ten istý význam ako vyššie) a polomery ϱ_j hypersfér pripísaných simplexu a takých, že sa dotýkajú práve jednej steny zvonku

$$\varrho_j = \frac{\Delta}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} B_i - 2B_j}$$

Pre tieto polomery platí vzťah

$$\frac{n-1}{\varrho} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\varrho_j}$$

je to dobre známy vzťah v E_2.

Ďalej je odvodený vzorec na výpočet obsahu V (n-dimenzionálneho) simplexu v E_n

$$V = \frac{1}{(n-1)!} \left| \frac{\Delta^n}{B_1 B_2 \dots B_{n+1}} \right|$$

a $(n-1)$ — dimenzionálneho obsahu jeho stien

$$V_j = \frac{1}{(n-1)!} \left| \frac{\Delta^{n-1} B_j}{B_1 B_2 \dots B_{n+1}} \right| \quad , j = 1, 2, \dots, n+1$$

Tieto vzťahy umožňujú položiť základy zovšeobecnenej trigonometrie.

V práci [7] sa dokazujú zovšeobecnené Euklidove vety v tzv. pravouhlých simplexoch v E_n. Pri vhodnej voľbe kartézskej súradnej sústavy je pravouhlý simplex určený ako prienik polpriestorov

$$\pi_1 = x_1 \geqq 0,\ \pi_2 = x_2 \geqq 0, \dots, \pi_n = x_n \geqq 0,\ \pi_{n+1} = -a_1 x_1 - \dots - \\ - a_n x_n + b \geqq 0$$

pričom $|(a_1, \dots, a_n)| = 1$, $a_1, \dots, a_n, b > 0$.

Steny ležiace v rovinách $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ sa nazývajú odvesny, ich spoločný bod sa nazýva vrcholom (priestorového) pravého uhla, stena v poslednej rovine je prepona simplexu. Rovina

$$\pi_{1,2} = \frac{a_2 x_1 - a_1 x_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0$$

prechádza priesečnicou rovín $\pi_1 = 0$ a $\pi_2 = 0$ a je kolmá na preponu (aj na ostatné odvesny). Rovina $\pi_{1,2}$ rozdelí simplex S na dva simplexy S' a S''. Spoločná stena S' a S'' leží v rovine $\pi_{1,2}$ a nazýva sa výškovou stenou S. Odvesna v rovine π_1 leží celá v simplexe S' odvesna v π_2 zase v S''. Ostatné odvesny a preponu rozdelí výšková stena na dve časti (jedna leží v S', druhá v S''). Pre obsahy týchto častí V_j' a V_j'' platí

$$V_j' + V_j'' = V_j, \qquad j = 3, \ldots, n+1$$

Pomocou vyššie uvedených vzorcov pre obsahy možno dokázať Euklidovu vetu o odvesne

$$V_1^2 + \sum_{j=3}^{n} V_j V'_j = V_{n+1} V'_{n+1}; \qquad V_2^2 + \sum_{j=3}^{n} V_j V_j'' = V_{n+1} V_{n+1}'' \tag{3}$$

a Euklidovu vetu pre výšku

$$V_{12}^2 + \sum_{j=3}^{n} V_j' V_j'' = V_{n+1}' V_{n+1}''$$

kde V_{12} je obsah výškovej steny. Pre $n = 2$ sa súčty na ľavých stranách zrejme rovnajú 0. Sčítaním rovností (3) dostaneme Pytagorovu vetu

$$V_1^2 + \ldots + V_n^2 = V_{n+1}^2$$

V práci [8] je definovaný pojem n-hranného uhla v E_n a jeho sínusovej funkcie. n-hranný uhol γ v E_n je prienik n polpriestorov

$$\pi_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n - b_i \geqq 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

pričom rovnice $\pi_i = 0$ sú lineárne nezávislé. Potom

$$\sin \gamma = \left| \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \right| > 0$$

Dá sa dokázať $0 < \sin \gamma \leqq 1$; keď R je priestorový pravý uhol, potom $\sin R = 1$. Ak označíme φ_{ik} uhol dvoch nadrovín π_i a π_k, potom platí

$$\sin^2 \gamma = \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi_{12} & \dots & \cos \varphi_{1n} \\ \cos \varphi_{12} & 1 & & \cos \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos \varphi_{1n} & \cos \varphi_{2n} & & 1 \end{vmatrix}$$

Z definície symbolov B_i vyplýva: $|B_j| = \sin \gamma_j$, kde γ_j je tzv. vnútorný uhol simplexu, a tak z vyššie uvedených vzorcov pre obsah stien dostávame sínusovú vetu pre simplexy

$$\frac{\sin \gamma_j}{V_j} = \text{konšt.} \qquad j = 1, \dots, n + 1$$

V pravouhlom simplexe sa vyššie spomínaná konštanta rovná $\frac{1}{V_{n+1}}$, a tak tu platí

$$\sin \gamma_j = \frac{V_j}{V_{n+1}}, \qquad j = 1, \dots, n + 1$$

Pre n-rozmerný obsah simplexu v E_n sú odvodené rozmanité vzorce. Na vzorce známe v E_2 upomínajú tieto

$$V = \frac{1}{n} \sqrt[n-1]{(n-1)!\, V_1 V_2 \dots V_n \sin \gamma_{n+1}}$$

$$V = \frac{1}{n \sin \gamma_{n+1}} \sqrt[n-1]{(n-1)!\, V_{n+1}^n \sin \gamma_1 \dots \sin \gamma_n}$$

(v týchto vzorcoch možno indexy cyklicky permutovať).

V práci [10] je odvodená kosínusová veta pre simplexy: Nech $(i_1, \dots, i_{n+1})$ je ľubovoľná permutácia čísel 1, 2, $\dots, n + 1$.

Potom pre ľubovoľné t platí

$$V_{i_1}^2 + \dots + V_{i_t}^2 + 2 \sum_{j < k \leqq 1} V_{i_j} V_{i_k} \cos \varphi_{i_j i_k} = V_{i_{t+1}}^2 + \dots + V_{i_{n+1}}^2 +$$
$$+ 2 \sum_{j < k \leqq 1} V_{i_j} V_{i_k} \cos \varphi_{i_j i_k}$$

pričom $\varphi_{i_j i_k}$ značia uhly vonkajších normál stien V_{i_j} a V_{i_k}.

Do elementárnej geometrie zapadajú aj články [1], [2] a [3].

B. Práce z elementárnej teórie čísel. RNDr. Bartoš sa venoval riešeniu a štúdiu jedného špeciálneho typu diofantických rovníc

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = \frac{a}{b}, \qquad (a, b) = 1 \tag{4}$$

Táto diofantická rovnica bola stredobodom pozornosti matematikov už v minulosti, ale aj v dnešnej dobe sa jej venuje mnoho význačných matematikov (Schinzel, Erdös, atď). RNDr. Bartoš sa venoval hlavne prípadom $n = 2$ a 3. Našiel súvis medzi riešením rovnice (4) a sústavy diofantických rovníc

$$x_1 + \ldots + x_n = a_i x_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

(a_i sú celé čísla). Ak $a = b$, potom (4) prejde na tvar

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1 \tag{5}$$

Táto rovnica sa nazýva optická rovnica. Optická rovnica má význam aj pri riešení problému pokrývania množiny všetkých celých čísel konečným počtom aritmetických postupností. Extrémnym riešením rovnice (5) sa nazýva n-tica zadaná rekurentným vzťahom $x_1 = 2$, $x_k = x_1 \ldots x_{k-1} + 1$ pre $k = 2, \ldots, \mathrm{n} - 1$, $x_n = x_1 \ldots x_{n-1}$. V článku [18] je dokázané, že toto extrémne riešenie je riešením aj rovnice

$$2 + x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + \ldots + x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 = x_1 \ldots x_{n-1}(x_n + 1)$$

Článok [11] sa zaoberá tzv. prolongabilnými riešeniami rovnice (4), v ktorej $a = 1$. Prolongabilné riešenie je definované takto: Ak existujú postupnosti prirodzených čísel $\{c_j\}_1^\infty$ a $\{d_j\}_0^\infty$ tak, že

$$x_1 = c_1, \ldots, x_{n-1} = c_{n-1}, \qquad x_n = c_n - d_{n-1} \tag{6}$$

je riešením rovnice (4) (pri $a = 1$) tak (6) sa nazýva (pre ľubovoľné n) prolongabilným riešením.

V článku je ukázaný algoritmus na nájdenie všetkých prolongabilných riešení tejto rovnice. Počet riešení s rastúcim n sa prudko zväčšuje. Pri $d_i = 1$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) dostaneme tzv. extrémné riešenie. V dodatku práce sú výsledky zovšeobecnené pre rovnicu (4).

V článku [17] sa zovšeobecňuje diofantická rovnica $xy(x^2 - y^2) = z^2$ (ktorá nemá riešenia v prirodzených číslach; ako je známe, súvisí s Fermatovým problémom: určiť pytagorejský trojuholník, ktorého obsah je štvorcom celého čísla). Sú určené všetky riešenia rovnice

$$xy[x^{2kn} + (-1)^m y^{2kn}] = kz^2$$

pre $k = 1, 2$; $m = 1, 2$. Ďalej je dokázaná existencia takého prirodzeného čísla $k = k(m)$, že pre $t > k(m)$ rovnice

$$xy(x^{2^k n} - y^{2^k n}) = m, \qquad x^{2^k n} - y^{2^k n} = m$$

nemajú riešenie v celých číslach.

C. Okrem spomenutých dvoch oblastí sa vedecká činnosť P. Bartoša dopĺňa ešte rozmanitou paletou ďalších vedeckých výsledkov. Sú to práce z kombinatoriky ([14], [15], [16]), ako aj z aplikácie matematiky ([23], [24]). V týchto oblastiach P. Bartoš spolupracuje s viacerými matematikmi a inžiniermi.

Tu sme sa zamerali len na vedeckú činnosť. Nemenej významná je však aj početná skupina metodických a didaktických článkov, ako aj spolupráce na tvorbe štyroch stredoškolských učebníc.

Zvláštnu kategóriu tvorí článok [22], ktorý možno považovať za akýsi matematický fejtón. V tejto práci je použitím údajov z cestopisu Bengta Danielsona: *Bumerang* (Orbis Praha, 1964) vypracovaná matematická teória zákazov manželstva u jedného austrálskeho kmeňa. Príslušníci kmeňa boli rozdelení do štyroch skupín (a, b, c, d). Pri narodení bolo dieťa zaradené do niektorej skupiny, ktorá sa určila pomocou pomerne komplikovaných množinovo-teoretických úvah (medzi ktorými sa vyskytovali: utvorenie komplementu a prieniku množín). Tu uvedieme len výslednú tabuľku: Ak $x, y \in \{a, b, c, d\}$, tak symbolom xy označme skupinu, do ktorej je zaradený potomok z manželstva x (muž) a y (žena); ak je manželstvo x a y neprípustné, označme $xy = 0$. Potom zákazy manželstva a zaraďovanie detí do skupín možno vyjadriť tabuľkou

	a	b	c	d
a	0	c	0	0
b	d	0	0	0
c	0	0	0	a
d	0	0	b	0

(v článku [22] sa dodáva prvok 0 a skúma sa to ako grupoid).

Tak ako v druhej generácii sú možnosti aj zákazy manželstva medzi bratancami a sesternicami, platí to aj v ďalších generáciách. Možnosť uzavierania manželstva bola teda v niektorých prípadoch zbytočne obmedzovaná (čo mohlo byť jednou z príčin vymretia niektorých kmeňov). Na druhej strane je z moderného hľadiska nedostatkom tohoto systému možnosť manželstva medzi starými rodičmi a vnukmi.

P. Bartoš končí článok takto: „*Aj keď matematický obsah rodinnoprávnych predpisov nie je zložitý, neuberá to nič na pozoruhodnosti tej okolnosti, že taká sústava bola pomocou teórie množín vytvorená dávnymi predkami národov, ktoré ešte pred niekoľkými desaťročiami žili na primitívnom stupni kultúrneho vývoja.*“

RNDr. Pavel Bartoš by veľmi rád nadviazal kontakt s mladšími stredoškolskými profesormi, ktorí by chceli kráčať v jeho šľapajach.

Pri tejto príležitosti treba spomenúť, že práve v tomto našom časopise by začínajúci autori mohli uverejňovať svoje vedecké, ale aj metodické články. Nestojí teda nijaká prekážka v ceste tým, ktorí príslovečným vlastným príkladom chcú svojím žiakom ukázať vzor tvorivého prístupu k matematike.

Trahunt exempla?

Prehľad publikačnej činnosti RNDr. Pavla Bartoša

Časopis pro pěstování matematiky

[1] Lineární soustavy přímých podobností. 84 (1959), 129—139 (spolu s J. Vyšínom).
[2] Lineárne sústavy priamych podobných útvarov v rovine. 85 (1960), 189—199.
[3] O jednej vlastnosti rovnostranného trojuholníka a niektorých iných trojuholníkov 90 (1965), 101—103.
[4] Poznámka o určení simplexu rovinami a o parametrickom vyjadrení jeho bodov. 90 (1965), 366—368.
[5] Príspevok ku geometrii konvexných mnohostenov v n-rozmernom euklidovskom priestore. 91 (1966), 337—343.
[6] O jednej metóde určenia polomeru gule vpísanej a gulí pripísaných simplexu v E_n a niektoré aplikácie. 92 (1967), 8—15.
[7] Euklidove vety v pravouhlých simplexoch. 93 (1968), 256—259.
[8] Sínusová veta o simplexoch v E_n, 93 (1968), 273—277.
[9] O istej sústave diofantických rovníc, 93 (1968), 484—486.
[10] Kosínusová veta o simplexoch v E_n, 95 (1970), 150—154.
[11] O prolongabilných riešeniach optickej rovnice. 95 (1970), 278—289.
[12] Poznámka o počte riešení rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$ v prirodzených číslach. 95 (1970), 411—415.
[13] K riešeniu diofantickej rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}$. 96 (1971), 294—299 (spolu s K. Pehartzovou).

Matematický časopis SAV

[14] A genesis for combinatorial identities. 16 (1966), 31—40 (spolu s J. Kauckým)
[15] Additional note to our paper „A genesis for combinatorial identities". 16 (1966), 282—284 (spolu s J. Kauckým).
[16] O symetrických a cyklických priemeroch kladných čísel. 16 (1966), 291—298 (spolu so Š. Známom).
[17] Poznámka k istému Fermatovmu problému. 18 (1968), 21—24.
[18] O spoločnom riešení dvoch diofantických rovníc. 19 (1969), 305—306.
[19] O niektorých diofantických rovniciach. 19 (1969), 334—335.
[20] Jeden diofantický problém o tangenciálnych mnohouholníkoch, 20 (1970), 262—269.
[21] O niektorých kombinatorických nerovnostiach. 21 (1971), 219—220.

Aplikace matematiky

[22] Matematika v rodinnom práve austrálskych domorodcov. 12 (1967), 398—405.

Sdělovací technika

[23] Diagram pre určenie celkového odporu paralelne zapojených odporov a celkovej kapacity sériove zapojených kondenzátorov. XVII (1969), 211—212 (spolu s D. Kosorínom).

Elektrotechnický časopis SAV

[24] Príspevok ku graficko-počtárskemu riešeniu striedavých obvodov. XXII (1971), 374—381 (spolu s D. Kosorínom).

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

[25] O novom postupe vo vyučovaní náuky o elektrine na všeobecnovzdelávacích školách. VIII (1962), 232—236.

Matematika ve škole

[26] Poznámky k metodike témy: postupnosti a ich limity. 5 (1955), 24—31, 88—99.
[27] Jedno paradoxon z geometrie. 5 (1955), 475—477.
[28] O jednej metóde určenia limít niektorých postupností. 6 (1956), 40—48.
[29] Poznámky k vyučovaniu témy: vety Euklidove, veta Pytagorova a ich použitie. 6 (1956) 525—536.
[30] O jednej slovnej úlohe. 6 (1956), 605—609.
[31] Ešte k úlohe 11 kategórie A, piateho ročníka MO. 7 (1957), 298—300.
[32] Poznámky k metodike grafického riešenia slovných úloh o rovnomernom pohybe. 10 (1960), 16—27.
[33] O obrátenej Pytagorovej vete. 10 (1960) 73—77.
[34] O použití relatívnej rýchlosti pri riešení slovných úloh o rovnomernom pohybe. 10 (1960), 280—286.
[35] O jednom zvláštnom druhu dvojíc podobných útvarov v rovine. 11 (1960/61) 6—15.
[36] Nie je strom ako strom. 11 (1960/61), 133—136.
[37] O aplikácii rovnoľahlosti v úlohách na pohyb. 14 (1963/64), 380—386.
[38] Sú „vypuklé" uhly vypuklé? 14 (1963/64) 544—547.
[39] Ako správne robiť zápis. 15 (1964/65) 59—60.
[40] Za Karolom Dubeckým, 16 (1965/66), 42—43.

Rozhledy matematicko-fyzikální

[41] O lineárnych rovniciach s jednou neznámou, ktoré majú dva korene. 35 (1957), 49—50.
[42] O meraní výšky egyptských pyramíd pred 2500 rokmi. 42 (1963/64), 134—138.
[43] O jednej špecifickej vlastnosti pravouhlých trojuholníkov. 43 (1964/65), 1—2.
[44] O jednom zovšeobecnení Pytagorevej vety. 45 (1966/67) 205—208.